

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ (Buổi 3)

GIỚI HẠN MỘT BÊN CỦA HÀM SỐ:

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

➤ Cách tính $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (giới hạn bên trái), $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (giới hạn bên phải) cũng giống như cách tìm $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ đã đề cập ở các bài trước nhưng lưu ý:

- ❖ Giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ($x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$).
- ❖ Giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ($x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$).

➤ Định lí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

B. VÍ DỤ:

Ví dụ 1. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x - 6|x - 3|}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{16 - x^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5x - 6|x - 3|}{x - 1} = \frac{5 \cdot 3 - 6|3 - 3|}{3 - 1} = \frac{15}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{16 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{(4 + x)(4 - x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(4 - x)}{(4 + x)(4 - x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{(4 + x)} = -\frac{1}{8}$$

Áp dụng 1: Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|3x - 1| - 2x}{3x + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\pi x + 2x^2}{x - 1}$$

Ví dụ 2. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{7}{x + 3}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 1}{x - 2} = +\infty$$

Nhận dạng giới hạn $\frac{c}{0}$, kết quả là $+\infty$ hoặc $-\infty$

Vi: • $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x+1) = 2.3+1 = 7 > 0$

Tính giới hạn của tử và mẫu

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$

• $x \rightarrow 2^+ \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x-2 > 0$

Xét dấu của mẫu

b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{7}{x+3} = -\infty$

Vi: • $\lim_{x \rightarrow -3^-} 7 = 7 > 0$

• $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x+3) = 0$

• $x \rightarrow -3^- \Leftrightarrow x < -3 \Leftrightarrow x+3 < 0$

Áp dụng 2: Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\pi x + 2x^2}{x-1}$

Ví dụ 3. Tính:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty$$

Vi: • $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = 2-3 = -1 < 0$

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0$

• $x \rightarrow 2^- \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$

Áp dụng 3: Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 3x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2-x}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{5-x} - 12}{x^2 - 25}$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\frac{\pi}{2} - x}$

Ví dụ 4. Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x-4}{(x+4)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x+2}{-x^2+2x-1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x-4}{(x+4)^2} = -\infty$$

Vì: • $\lim_{x \rightarrow -4} (5x-4) = 5 \cdot (-4) - 4 = -24 < 0$

• $\lim_{x \rightarrow -4} (x+4)^2 = 0$

• $x \rightarrow -4 \Leftrightarrow (x+4)^2 > 0$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x+2}{-x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x+2}{-(x-1)^2} = -\infty$$

Vì: • $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2-x+2) = 3 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 4 > 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$

• $x \rightarrow 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 < 0$

Áp dụng 4: Tính:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{4x-6}{(x-5)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3}-5}{-x^2+4x-4}$$

Ví dụ 5. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 5x+2, & x \geq 1 \\ x^2-3, & x < 1 \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có)

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2-3) = 1^2-3 = -2$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x+2) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad (-2 \neq 7)$

Suy ra: Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 5x-7 & x \geq 1 \\ x^2-3, & x < 1 \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có)

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2-3) = 1^2-3 = -2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x - 7) = 5.1 - 7 = -2$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2.$$

Áp dụng 5,6:

$$\text{AD5. Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có)

$$\text{AD6. Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ -5 + \frac{4-x}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (nếu có)